НЕКОТОРЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ РАВЕНСТВА ГРАФОВ ГРЮНБЕРГА–КЕГЕЛЯ ДВУХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

М.Р. Зиновьева

Институт математики и механики УрО РАН
С. Ковалевской 16, 620016 Екатеринбург, Россия zinovieva-mr@yandex.ru

Графом простых чисел или *графом Грюнберга–Кегеля* $GK(G)$ конечной группы G называется граф, вершинами которого служат простые делители порядка группы G, и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка rs.

В "Коуровской тетради"[1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга–Кегеля. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случае, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор [4] исследовал этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. Гипотеза А.В. Васильева в этих случаях подтверждается.

В данной работе продолжается исследование, начатое автором в [4]–[6].

Хорошо известна теорема Жигмонди [7]: *если q и n — натуральные числа, $q \geq 2$, $n \geq 2$, то существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.*

Здесь простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$ и обозначается через $r_n(q)$ или кратко r_n, если q фиксировано. Обозначим также через $R_n(q)$ – множество примитивных простых делителей числа $q^n - 1$.

Далее $q = p^f$ и $q_1 = {p_1}^{f_1}$, где p, p_1 – различные простые числа и f, f_1 – натуральные числа.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество конечных простых классических групп $A^{\pm}_{n-1}(q)$, где $n \geq 7$, $B_n(q)$, где $n \geq 5$, $C_n(q)$, где $n \geq 5$, $D^{\pm}_n(q)$, где $n \geq 5$.

В [6] сформулирована следующая

Теорема. *Пусть G и G_1 – неизоморфные группы из $\mathcal{M}$ над полями порядков q и q_1 соответственно. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений:* (1) $\{G, G_1\} = \{A^{\pm}_{n-1}(q), A^{\pm}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$; (2) $\{G, G_1\} = \{B_n(q), B_n(q_1)\}$; (3) $\{G, G_1\} = \{B_n(q), C_n(q_1)\}$; (4) $\{G, G_1\} = \{C_n(q), C_n(q_1)\}$; (5) $\{G, G_1\} = \{D_7(q), D_8(q_1)\}$; (6) $\{G, G_1\} = \{D_n(q), D_n(q_1)\}$; (7) $\{G, G_1\} = \{^2D_7(q_1), D_8(q)\}$; (8) $\{G, G_1\} = \{^2D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$; (9) $\{G, G_1\} = \{A_7(q), D_6(q_1)\}$; (10) $\{G, G_1\} = \{^2A_7(q), D_6(q_1)\}$; (11) $\{G, G_1\} = \{A^{\pm}_{n-1}(q), D_{n_1}(q_1)\}$, *где* $n_1 \in \{2n/3 - 1/3, 2n/3 - 1\}$ *и* $31 \leq n_1 \equiv 3 \pmod 4$.

Целью данной работы является уточнение утверждений этой теоремы. Основания для выделения множества $\mathcal{M}$ дает следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $G \in \mathcal{M}$ и G_1 – конечная простая группа такая, что графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают. Тогда $G \in \mathcal{M}$ или $(G, G_1) = (A^{\pm}_6(q), {}^2D_4(q_1))$, где q и q_1 нечетны.*

Для утверждений (9) и (10) теоремы можно получить следующие арифметические следствия равенства графов простых чисел.

Предложение 2. *Пусть $G = A_7(q)$, $G_1 = D_6(q_1)$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнены следующие утверждения:*

(1) $\pi(q^2-1)=\pi(q_1^2-1)$*;*

(2) $\pi(q(q^2+q+1)/(3,q-1))=\pi(q_1(q_1^2+1)/2)$*, в частности,* $p_1\in R_3(q)$ *и* $p\in R_4(q_1)$*;*

(3) $\{r_3(q_1),r_8(q_1)\}=\{r_5(q),r_6(q)\}$ *для некоторых простых делителей* $r_3(q_1)\in R_3(q_1)$*,* $r_8(q_1)\in R_8(q_1)$*,* $r_5(q)\in R_5(q)$ *и* $r_6(q)\in R_6(q)$*.*

Замечание 1. Автору известно большое число пар (q,q_1), удовлетворяющих утверждению (1) предложения 2, но неизвестно существование хотя бы одной пары чисел, удовлетворяющих утверждениям (1)–(3).

Предложение 3. *Пусть* $G={}^2A_7(q)$*,* $G_1=D_6(q_1)$*. Если графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *совпадают, то выполнены следующие утверждения:*

(1) $\pi(q^2-1)=\pi(q_1^2-1)$*;*

(2) $\pi(q(q^2-q+1)/(3,q+1))=\pi(q_1(q_1^2+1)/2)$*, в частности,* $p_1\in R_6(q)$ *и* $p\in R_4(q_1)$*;*

(3) $\{r_3(q_1),r_8(q_1)\}=\{r_3(q),r_{10}(q)\}$ *для некоторых простых делителей* $r_3(q_1)\in R_3(q_1)$*,* $r_8(q_1)\in R_8(q_1)$*,* $r_3(q)\in R_3(q)$ *и* $r_{10}(q)\in R_{10}(q)$*.*

Замечание 2. Автору известна только одна пара (q,q_1), удовлетворяющих утверждению (1) и (2) предложения 3, а именно: $(q,q_1)=(5,7)$. Если $q=5$, то $r_3(q)=31$, $r_{10}(q)=521$. Если $q_1=7$, то $r_3(q_1)=19$, $r_8(q_1)=1201$. Таким образом, $\{19,1201\}\neq\{31,521\}$ и утверждение (3) для такой пары чисел (q,q_1) не выполнено.

Аналогичные условия на простые делители можно получить и в других случаях теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469).

Литература

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 16-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006.

2. Hagie M. *The prime graph of a sporadic simple group* // Comm. Algebra. 2003. V. 31. No. 9. P. 4405–4424.

3. Звездина М.А. *О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы* // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. №1. С. 65–76.

4. Зиновьева М.Р. *Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. №2. С. 168-183.

5. Зиновьева М.Р. *О графах простых чисел конечных простых классических групп над полями разных характеристик* // Алгебра и приложения. Тр. Межд. конф. по алгебре. Нальчик, 2014. С. 55-57.

6. Зиновьева М.Р. *О совпадении графов Грюнберга–Кегеля двух конечных простых классических групп лиева типа над полями разных характеристик* // Межд. конф. “Мальцевские чтения”. Тез. докл. Новосибирск, 2015. С. 101.

7. Zsigmondy K. *Zur Theorie der Potenzreste* // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265-284.